ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 155.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 216.

Α4. (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$, πρέπει: $\begin{cases} x\in D_g\cap D_h \\ h(x)\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\neq 1\end{cases} \Rightarrow x>1.$

Άρα $D_f=(1,+\infty)$.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}}=\frac{x+1}{x-1}$$

Για να ορίζεται η $r(x)=g(x)\cdot h(x)$, πρέπει $x\in D_g\cap D_h$, δηλαδή $x\in[1,+\infty)$. Άρα $D_r=[1,+\infty)$ και

$$r(x)=g(x)\cdot h(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{x}^2-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x-\frac{1}{x}$$

Β2.
- $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-1+2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$
- $f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0\ \forall x>1$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$, οπότε $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

Θέτω $f(x)=y\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}=y\Leftrightarrow x+1=yx-y\Leftrightarrow x-yx=-y-1$ $\Leftrightarrow x(1-y)=-(y+1)\Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{y-1}$ ή $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο τιμών της f. Άρα $D_{f^{-1}}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\right)=(1,+\infty)$. Οπότε $f^{-1}=f$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)\dfrac{1}{x-1}=+\infty$

Β3. Αναζητώ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

- $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2}=1$

- $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$

  Άρα η $y = x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B4. $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^3 - 4x^2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = 1$ Απορρίπτεται ή $x = -1$ Απορρίπτεται

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f συνεχής στο $x = 2$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} f(x) \Leftrightarrow e^\lambda = \lambda + 1$
Γνωρίζω ότι $e^x \geq x + 1$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$ άρα $\lambda = 0$. Η παραπάνω σχέση προκύπτει από το $lnx \leq x - 1$ θέτοντας όπου x το e^x.

Γ2. Για $\lambda = 0$: $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$ και $f'(x) = \begin{cases} -2, & 0 \leq x < 2 \\ -2x + 4, & x > 2 \end{cases}$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Απορρίπτεται.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
f	$\searrow$		

- Η f $\searrow$ στο $[0, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 0$, το $f(0) = 5$.

Γ3. **i)**
- Η f συνεχής στο $[0, 3]$
- Ελέγχω παραγωγισιμότητα στο $x = 2$
  $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$
  $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{-(x - 2)^2}{x - 2} = 0$
  Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$ και κατά συνέπεια δεν ικανοποιεί το ΘΜΤ στο $[0, 3]$.
- Αναζητώ $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow$
  $\begin{cases} -2 = -\dfrac{5}{3} & \text{Άτοπο} \\ -2\xi + 4 = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \xi = \dfrac{17}{6} & \text{Δεκτή} \end{cases}$

ii) Το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(2, y(t))$.

- Ισχύει $y(0) = 0$ και $y'(t) = 0.5$
- Έστω ότι την χρονική στιγμή $t = t_0$, το M βρίσκεται πάνω στην C_f. Αυτό συμβαίνει όταν $y = f(2) = 1$. Άρα $M(2, 1) \in C_f$, δηλαδή $x(t_0) = 2$ και $y(t_0) = 1$.
- $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{AM}{OA} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(\omega(t)) = \dfrac{y(t)}{2}$
- $(\varepsilon\varphi\omega)' = \left(\dfrac{y(t)}{2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \dfrac{y'(t)}{2}$.
- Την $t = t_0$: $\sigma\upsilon\nu\omega(t_0) = \dfrac{AM}{OM} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Τελικά για $t = t_0$: $\dfrac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot \omega'(t_0) = \dfrac{0.5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4} \cdot \omega'(t_0) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \dfrac{1}{5}\dfrac{rad}{sec}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. ∘ $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{x} + \alpha\right) \cdot x - lnx - \alpha x}{x^2} = \dfrac{1 - lnx}{x^2}$.

∘ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - lnx = 0 \Leftrightarrow x = e$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(e)$	$\searrow$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = e$, το $f(e)$ και από το σύνολο τιμών προκύπτει ότι $f(e) = 1 + \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \dfrac{1 + \alpha e}{e} = \dfrac{e + 1}{e} \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Δ2. Σύνολο τιμών της f:

∘ Στο $\Delta_1 = (0, e]$: $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} f(x), f(e)\right] = \left(-\infty, 1 + \dfrac{1}{e}\right]$. Αφού το $0 \in f(\Delta_1)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (0, e)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ και αφού $f \nearrow$, τότε το x_0 είναι μοναδικό.

∘ Στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$: $f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(e)\right] = \left(1, 1 + \dfrac{1}{e}\right]$. Αφού $0 \notin f(\Delta_2)$, δεν υπάρχει ρίζα στο Δ_2.

Η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ με $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-ln2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} < 0$ και $f(1) = 1 > 0$. Από Θεώρημα Bolzano η μοναδική ρίζα $x_0 \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Δ3. **i)** Η $f \nearrow$ στο $(0, e]$ και $f(2) = \dfrac{ln2 + 2}{2}$ και $f(4) = \dfrac{ln4 + 4}{4} = \dfrac{2ln2 + 4}{4} = \dfrac{ln2 + 2}{2}$.
Άρα το $x = 2$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f(4)$ και αφού $f \nearrow$ στο $(0, e]$, τότε είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα.
Το $x = 4$ προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f(4)$ στο $(e, +\infty)$ και αφού $f \searrow$, τότε η ρίζα είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα.

ii) $2^x \le x^2 \overset{lnx \nearrow}{\Leftrightarrow} ln2^x \le lnx^2 \Leftrightarrow xln2 \le 2lnx \Leftrightarrow \dfrac{ln2}{2} \le \dfrac{lnx}{x} \Leftrightarrow \dfrac{ln2}{2} + 1 \le \dfrac{lnx}{x} + 1 \Leftrightarrow f(2) \le f(x)$.

∘ $f(2) \le f(x) \overset{f \nearrow (0,e]}{\Leftrightarrow} 2 \le x \le e$

∘ $f(2) \le f(x) \Leftrightarrow f(4) \le f(x) \overset{f \searrow [e,+\infty)}{\Leftrightarrow} e \le x \le 4$.

Τελικά $x \in [2, 4]$.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-ln2}^{0} \left| f\left(e^x\right) \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) f'(u) \right| du \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} \left| f(u) f'(u) \right| du + \int_{x_0}^{1} \left| f(u) f'(u) \right| du \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u) f'(u) du + \int_{x_0}^{1} f(u) f'(u) du \\
&= \left[-\frac{f^2(u)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_{x_0}^{1} = -\frac{f^2(x_0)}{2} + \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} - \frac{f^2(x_0)}{2} \\
&= 0 + \frac{\left(\dfrac{-ln2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right)^2}{2} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{(2ln2 - 1)^2}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1 + 1 - 4ln2 + 4\left(ln2\right)^2}{2} = -2ln2 + 2\left(ln2\right)^2 + 1 \text{ τ.μ.}
\end{aligned}
$$

Για την αλλαγή μεταβλητής:

- Θέτω $u = e^x$
- $du = e^x dx$
- $x = -ln2$: $u = \dfrac{1}{2}$
- $x = 0$: $u = 1$

Από το Δ_1 έχουμε $f'(u) > 0$ $\forall u \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
Για το πρόσημο της f ισχύει ότι:

- Αν $\frac{1}{2} < x < x_o \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0)$ $\Leftrightarrow f(x) < 0$.
- Αν $x_0 < x < 2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(x)$ $\Leftrightarrow f(x) > 0$