ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΕΠΑ.Λ.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31.

Α2. (α) Σχολικό βιβλίο σελίδα 22.

(β) $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} w_i}$

Α3. (α) Λάθος (β) Λάθος (γ) Σωστό (δ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = x^2 - 6x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

- $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$
- $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+4}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{6-4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[5, +\infty)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 5]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 1$, το $f(1) = \dfrac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 5$, το $f(5) = \dfrac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + \dfrac{1}{3} = -8$.

Β3. ∘ $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

∘ $f'(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(0, f(0))$ δηλαδή στο $M(0, \frac{1}{3})$ είναι $y = \lambda \cdot x + \beta$. Όμως $\lambda = f'(0) = 5$. Επίσης οι συντεταγμένες του σημείου M επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης, οπότε για $x = 0$ και $y = \frac{1}{3}$ έχουμε: $\frac{1}{3} = 5 \cdot 0 + \beta \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{3}}$.

Άρα η εφαπτομένη είναι η $y = 5x + \frac{1}{3}$.

Β4. $\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 12.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $s = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \frac{8}{2} = 4.$

Γ2. $CV = 20\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow \frac{4}{\bar{x}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = 20.$

Γ3. Αφού $\bar{x} = 20 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{\nu} = 20 \Leftrightarrow \frac{22 + 18 + 20 + \kappa + 14 + 16}{5} = 20 \Leftrightarrow \frac{90 + \kappa}{5} = 20 \Leftrightarrow 90 + \kappa = 100 \Leftrightarrow$ $\boxed{\kappa = 10}$.

Για $\kappa = 10$, διατάσσω τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: $14, 16, 18, 22, 30$.

Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 5 (περιττός), τότε η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή $\boxed{\delta = 18}$.

Γ4. Έστω x_i οι πρωινές θερμοκρασίες και y_i οι αντίστοιχες μεσημεριανές με $i = 1, \ldots, 5$. Τότε ισχύει ότι $y_i = x_i + 10\% x_i$, δηλαδή $\boxed{y_i = 1,1 \cdot x_i}$ με $i = 1, \ldots, 5$.

∘ $\bar{y} = 1,1 \cdot \bar{x} = 1,1 \cdot 20 = 22$

∘ $s_y = |1,1| \cdot s = 1,1 \cdot 4 = 4,4$

Οπότε $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4,4}{22} = 20\%$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο OAB έχουμε: $(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 100 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow |y| = \sqrt{100 - x^2} \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{100 - x^2}$. Άρα $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$. Για το πεδίο ορισμού, πρέπει:

∘ $100 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 100 \Leftrightarrow |x| \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 10.$

∘ $x > 0$

∘ $y > 0 \Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} > 0 \Leftrightarrow 100 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 10$ και $x \neq -10$.

Άρα $D_f = (0, 10)$.

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f για $x = 8$ είναι $f'(8)$.

- $f'(x) = \left(\sqrt{100-x^2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{100-x^2}} \cdot (100-x^2)' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$.
- $f'(8) = \dfrac{-8}{\sqrt{100-8^2}} = \dfrac{-8}{\sqrt{36}} = \dfrac{-8}{6} = -\dfrac{4}{3}$.

Δ3. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{f(x)-8}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)} = \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{100-x^2-64}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)} =$
$\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{36-x^2}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)} = \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{-(x-6)(x+6)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)} = \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{-(x+6)}{\sqrt{100-x^2}+8} = \dfrac{-12}{16} = -\dfrac{3}{4}$

Δ4. Είναι $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{100-x^2}} < 0$ για κάθε $x \in (0,10)$. Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,10)$. Επίσης είναι $x_1 < x_3 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.