ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ στις Καλοκαιρινές Ασκήσεις στα ΜΠ Γ' Λυκείου

1. **α)** Ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)+1}{x-1}=4$.

Έστω $h(x)=\dfrac{g(x)+1}{x-1}$, $x\neq 1$, με $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=4$.

$$h(x)=\frac{g(x)+1}{x-1}\Rightarrow g(x)+1=(x-1)\cdot h(x)\Rightarrow g(x)=(x-1)\cdot h(x)-1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\big((x-1)\cdot h(x)-1\big)=0\cdot 4-1=-1$

β) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}f(x)=-1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=-1 \quad (1)$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(\alpha x+\beta)=2\alpha+\beta$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(x^2-\beta x-\alpha-1\right)=4-2\beta-\alpha-1=3-\alpha-2\beta$$

$$(1)\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=3-\alpha-2\beta=-1\Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+\beta=-1\\ 3-\alpha-2\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+\beta=-1 & (2)\\ \alpha+2\beta=4 & (3)\end{cases}$$

$$(3)\Leftrightarrow \alpha=4-2\beta$$

$$(2)\Leftrightarrow 2(4-2\beta)+\beta=-1\Leftrightarrow 8-4\beta+\beta=-1\Leftrightarrow 3\beta=9\Leftrightarrow \beta=3$$

$$\alpha=4-2\beta\Leftrightarrow \alpha=4-6\Leftrightarrow \alpha=-2$$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

Καθώς $x\to 0$, είναι $f(x)=\alpha x+\beta=-2x+3$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(-2x+3)=3$$

δ) Από α) ερώτημα είναι $g(x)=(x-1)\cdot h(x)-1$ και $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=4$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+\sqrt{2-x}}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)h(x)-1+\sqrt{2-x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)h(x)}{(x-1)(x+1)}+\frac{\sqrt{2-x}-1}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{h(x)}{x+1}+\frac{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{h(x)}{x+1}+\frac{2-x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{h(x)}{x+1}+\frac{1-x}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{h(x)}{x+1}+\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{h(x)}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}\right)$$
$$= \frac{4}{2} + \frac{-1}{2\cdot 2}$$
$$= 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

2. **α)** • Ισχύει $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 2 - 3\ln x$ (1), για κάθε $x > 0$.

Έστω $u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$

$$(1) \Rightarrow 2f\left(\frac{1}{u}\right) - f(u) = 2 - 3\ln\frac{1}{u} \Rightarrow 2f\left(\frac{1}{u}\right) - f(u) = 2 - 3\ln u^{-1} \Rightarrow 2f\left(\frac{1}{u}\right) - f(u) = 2 + 3\ln u$$

Άρα $2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = 2 + 3\ln x$.

Λύνω το σύστημα:

$$\begin{cases} 2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 2 - 3\ln x \,\Big|\cdot 2 \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = 2 + 3\ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 4 - 6\ln x \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = 2 + 3\ln x \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε: $3f(x) = 6 - 3\ln x \Leftrightarrow f(x) = 2 - \ln x$.

• Ισχύει $(f\circ g)(x) = 1 - x \Rightarrow f(g(x)) = 1 - x$
$$\Rightarrow 2 - \ln g(x) = 1 - x$$
$$\Rightarrow \ln g(x) = x + 1$$
$$\Rightarrow \ln g(x) = \ln e^{x+1}$$
$$\Rightarrow g(x) = e^{x+1}$$

β) Είναι $f(x) = 2 - \ln x$, $D_f = (0, +\infty)$ και $h(x) = \sqrt{x-1}$, με $D_h = [1, +\infty)$.

• Η $h\circ f$ ορίζεται όταν:

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,+\infty) \\ 2 - \ln x \in [1,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2 - \ln x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq \ln e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq e \end{cases}$$

Άρα $D_{h\circ f} = (0, e]$.

• $(h\circ f)(x) = h(f(x)) = \sqrt{f(x) - 1} = \sqrt{2 - \ln x - 1} = \sqrt{1 - \ln x}$

γ) • $f(x)=2-\ln x$, $D_f=(0,+\infty)$

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow}-\ln x_1>-\ln x_2\overset{+2}{\Rightarrow}2-\ln x_1>2-\ln x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

• $g(x)=e^{x+1}$, $D_g=R$

Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2\overset{+1}{\Rightarrow}x_1+1<x_2+1\Rightarrow e^{x_1+1}<e^{x_2+1}\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$.

Άρα η g γνησίως αύξουσα στο R.

δ) $F(x)=h(x)-f(x)+2\Leftrightarrow F(x)=\sqrt{x-1}-2+\ln x+2\Leftrightarrow F(x)=\sqrt{x-1}+\ln x$, $D_F=[1,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

• $x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow\sqrt{x_1-1}<\sqrt{x_2-1}$ (1)

• $x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2$ (2)

(1)+(2)=> $\sqrt{x_1-1}+\ln x_1<\sqrt{x_2-1}+\ln x_2\Rightarrow F(x_1)<F(x_2)$

Άρα η F γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε και 1-1.

ε) Είναι $D_F=[1,+\infty)$, οπότε η ανίσωση $F(x^2+1)>F(x+3)$ ορίζεται όταν:

$(x^2+1)\in[1,+\infty)\Leftrightarrow x^2+1\geq1\Leftrightarrow x^2\geq0$, που ισχύει για κάθε $x\in R$

και $(x+3)\in[1,+\infty)\Leftrightarrow x+3\geq1\Leftrightarrow x\geq-2$.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
x^2-x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

Η F γνησίως αύξουσα, οπότε:

$F(x^2+1)>F(x+3)\Leftrightarrow x^2+1>x+3\Leftrightarrow x^2-x-2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

Αλλά πρέπει $x\geq-2$, άρα $x\in[-2,-1)\cup(2,+\infty)$

ζ) Η εξίσωση $\sqrt{x-1}+\ln x=0$ ορίζεται για $x\geq1$ και $x>0$, άρα $x\geq1$.

$$\sqrt{x-1}+\ln x=0\Leftrightarrow F(x)=0\Leftrightarrow F(x)=F(1)\overset{F\,1-1}{\Leftrightarrow}x=1$$

η) i) $$\lim_{x\to2}\frac{h(x)+(f\circ g)(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}+1-x}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}+1-x\right)\left(\sqrt{x-1}-(1-x)\right)}{(x^2-4)\left(\sqrt{x-1}-(1-x)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}^2-(1-x)^2}{(x^2-4)\left(\sqrt{x-1}-(1-x)\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x-1-1+2x-x^2}{(x^2-4)\left(\sqrt{x-1}-(1-x)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x-1}-(1-x)\right)}=\lim_{x\to2}\frac{-(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x-1}-(1-x)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-1)}{(x+2)\left(\sqrt{x-1}-(1-x)\right)}=\frac{-1}{4\cdot 2}=-\frac{1}{8}$$

ii) $\lim_{x\to 1}\left(h(x)\text{συν}\,\frac{1}{h(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x-1}\cdot\text{συν}\,\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\to\left(0\cdot\text{συν}(+\infty)\right)$

Για κάθε $x>1$ ισχύει: $\left|\text{συν}\,\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|\le 1$.

Οπότε $\left|\sqrt{x-1}\cdot\text{συν}\,\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|\le\left|\sqrt{x-1}\right|\Rightarrow-\left|\sqrt{x-1}\right|\le\sqrt{x-1}\cdot\text{συν}\,\frac{1}{\sqrt{x-1}}\le\left|\sqrt{x-1}\right|$

- $\lim_{x\to 1}\left(-\sqrt{x-1}\right)=0$
- $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}=0$

άρα $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x-1}\cdot\text{συν}\,\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)=0$

3. **α)** $f(x)=x^2+ax-6$.

Η C_f διέρχεται από το σημείο $M(2,-4)$, άρα $f(2)=-4\Leftrightarrow 4+2\alpha-6=-4\Leftrightarrow 2\alpha=-2\Leftrightarrow\alpha=-1$.

β) $f(x)=x^2-x-6$

- $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-2$

  άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $A(3,0)$ και $B(-2,0)$
- $x=0$, $f(0)=-6$

  άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,-6)$

γ) Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν:

$f(x)>0\Leftrightarrow x^2-x-6>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		+	0	−	0	+	

δ) i) $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^3-27}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^3-27}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x^2+3x+9}=\frac{5}{27}$

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{|f(x)|-6}=\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{|x^2-x-6|-6}\to\left(\frac{0}{0}\right)$

Είναι $\lim_{x\to 0}\left(x^2-x-6\right)=-6<0$, άρα $x^2-x-6<0$, κοντά στο 0.

Οπότε $\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{|x^2-x-6|-6}=\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{-x^2+x+6-6}=\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{-x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{x(-x+1)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\etaμx}{x}\,\frac{1}{-x+1}\right)=1\cdot 1=1$$

iii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{f(x)+3x+7}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2-x-6+3x+7}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|}{x+1}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$, οπότε μελετώ το πρόσημου του $x+1$.

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$
$x+1$	$-\quad 0 \quad +$

Το $x+1$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του -1, οπότε υπολογίζω τα πλευρικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{|x+1|}{x+1}\overset{x+1<0}{=}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-(x+1)}{x+1}=-1$
- $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|x+1|}{x+1}\overset{x+1>0}{=}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x+1}{x+1}=1$

άρα το όριο δεν υπάρχει.

4. **α)** Γνωρίζουμε ότι το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\lambda x}{x-2}$ υπάρχει στο R, άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\lambda x}{x-2}=\ell$, $\ell\in R$.

Έστω $h(x)=\dfrac{x^2+\lambda x}{x-2}$, $x\neq 2$, με $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=\ell$.

$h(x)=\dfrac{x^2+\lambda x}{x-2}\Rightarrow x^2+\lambda x=(x-2)\cdot h(x)$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+\lambda x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot h(x)\Rightarrow 4+2\lambda=0\cdot\ell\Rightarrow 4+2\lambda=0\Rightarrow\lambda=-2$.

β) Είναι $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$, με $D_f=R-\{2\}$,

και $g(x)=\dfrac{xe^x+x}{e^x+1}$, με $D_g=R$, αφού $e^x+1>0$, για κάθε $x\in R$.

Οπότε $D_f\neq D_g$, άρα $f\neq g$.

Αλλά $f(x)=\dfrac{x(x-2)}{x-2}=x$ και $g(x)=\dfrac{x(e^x+1)}{e^x+1}=x$.

Άρα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in R-\{2\}$.

γ) Από ερώτημα β) είναι $g(x)=x$,

οπότε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$