ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Βιβλίο σελ. 31

Α2. Βιβλίο σελ. 14

Α3. Βιβλίο σελ. 72

Α4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Λάθος

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1.

α. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = \frac{2+9+20+9}{10} = \frac{40}{4} = 4$

β. Η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα της πέμπτης και της έκτης παρατήρησης. $\delta = \frac{x_5+x_6}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$

γ. $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{(1-4)^2 2+(3-4)^2 3+(5-4)^2 4+(9-4)^2 1}{10} = \frac{50}{10} = 5$

Β2.

Η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5}$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Έστω ότι το δείγμα είναι ομοιογενές, τότε ισχύει $CV \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{4} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \leq 0{,}4 \Leftrightarrow 5 \leq 0{,}16$, άτοπο, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x) = (x^2 - x + 1)' \Leftrightarrow \boldsymbol{f'(x) = 2x - 1}$, $\boldsymbol{x \epsilon \mathbb{R}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Οπότε έχουμε: $f'(x) < 0 \; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; x < \frac{1}{2}$ $\quad \varepsilon\nu\acute{\omega} \quad$ $f'(x) > 0 \;\; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; x > \frac{1}{2}$

Επομένως από το κριτήριο πρώτης παραγώγου προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για

$x = \frac{1}{2}$, το $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$

Γ2. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $A\big(2\,, f(2)\big)$ έχει εξίσωση: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

Για $x = 2$ έχουμε : $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3 \quad \kappa\alpha\iota \quad f'(2) = 4 - 1 = 3$

Οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται: $y - 3 = 3 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 3x - 3}$

Γ3. Η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $y = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(1\,, 0)$.

Η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ όταν $x = 0$. Οπότε έχουμε $y = 0 - 3 = -3 \Leftrightarrow y = -3$.

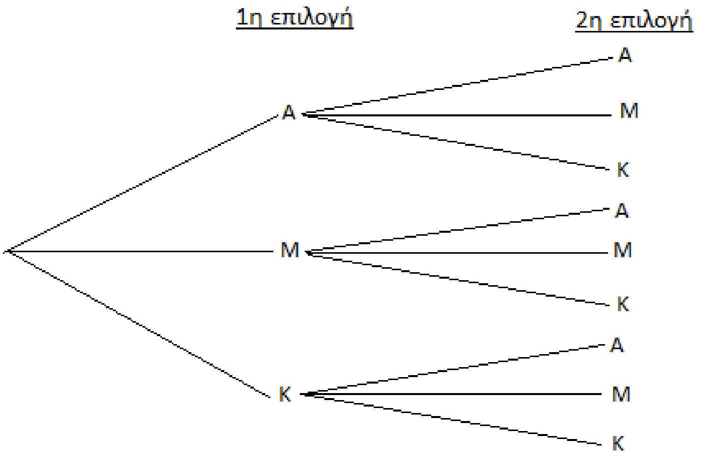
Άρα τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0\,, -3)$.

Γ4. Έχουμε: $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$ απροσδιόριστη μορφή.

Οπότε το όριο γίνεται : $\lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)}{(x - 1) \cdot \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}^2 - 1}{(x - 1) \cdot \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)} =$
$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{(x - 1) \cdot \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{x \cdot (x - 1)}{(x - 1) \cdot \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)} = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Ω = {ΑΑ, ΑΜ, ΑΚ, ΜΑ, ΜΜ, ΜΚ, ΚΑ, ΚΜ, ΚΚ} , Ν(Ω) = 9

Δ2. Α = {ΑΜ, ΜΜ, ΚΜ}

Β = {ΑΜ, ΑΚ, ΜΑ, ΜΚ, ΚΑ, ΚΜ}

Δ3. Αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, άρα:

α. $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, οπότε $P(A') = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$

Έχουμε $A \cap B = \{AM, KM\}$, οπότε $P(A \cap B) = \frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}$

Έχουμε $A - B = \{MM\}$, οπότε $P(A - B) = \frac{N(A-B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}$

Έχουμε $B - A = \{AK, MA, MK, KA\}$, οπότε $P(B - A) = \frac{N(B-A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{9}$

β. Αφού το ενδεχόμενο Γ είναι ασυμβίβαστο και με το Α και με το Β τότε θα είναι υποσύνολο του συμπληρώματος της ένωσής τους, δηλαδή $\Gamma \subseteq (A \cup B)'$.

Τότε ισχύει $P(\Gamma) \leq P((A \cup B)') \Leftrightarrow P(\Gamma) \leq \frac{2}{9}$

Αφού $A \cup B = \{AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM\}$, τότε $(A \cup B)' = \{AA, KK\}$ και $P((A \cup B)') = \frac{2}{9}$

Οπότε η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η πιθανότητα του Γ είναι $\frac{2}{9}$